

OPCIÓN A

1.- (a) Calcular la ecuación de la recta tangente a la función $y = \sqrt{x^2 + 1}$ en su punto extremo. (1 punto)

(b) Calcular $\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}}$ (0,75 puntos)

(c) Calcular $\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} - \frac{1}{x} \right)$ (0,75 puntos)

a)

$$y' = \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} \Rightarrow \text{Máximo o mínimo} \Rightarrow y' = 0 \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} y(0) = \sqrt{0^2 + 1} = 1 \\ y'(0) = \frac{0}{\sqrt{0^2 + 1}} = 0 \Rightarrow y - 1 = 0 \cdot (x - 0) \Rightarrow y - 1 = 0 \Rightarrow y = 1 \end{cases}$$

b)

$$\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} = \left(\frac{4+2}{6} \right)^{\frac{1}{4-4}} = \left(\frac{6}{6} \right)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty \Rightarrow \text{Llamando } L = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} \Rightarrow \ln L = \ln \left[\lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} \right]$$

$$\ln L = \lim_{x \rightarrow 4} \ln \left[\left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} \right] = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x-4} \cdot \ln \frac{x+2}{6} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{\ln \frac{x+2}{6}}{x-4} = \frac{\ln \frac{4+2}{6}}{4-4} = \frac{\ln \frac{6}{6}}{0} = \frac{\ln 1}{0} = \frac{0}{0} =$$

$$= \frac{1}{x+2} \cdot \frac{1}{6} \xrightarrow{\text{Aplicando L'Hopital}} \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{6} = \lim_{x \rightarrow 4} \frac{1}{x+2} = \frac{1}{4+2} = \frac{1}{6} \Rightarrow$$

$$\ln L = \frac{1}{6} \Rightarrow L = \lim_{x \rightarrow 4} \left(\frac{x+2}{6} \right)^{\frac{1}{x-4}} = e^{\frac{1}{6}} = \sqrt[6]{e}$$

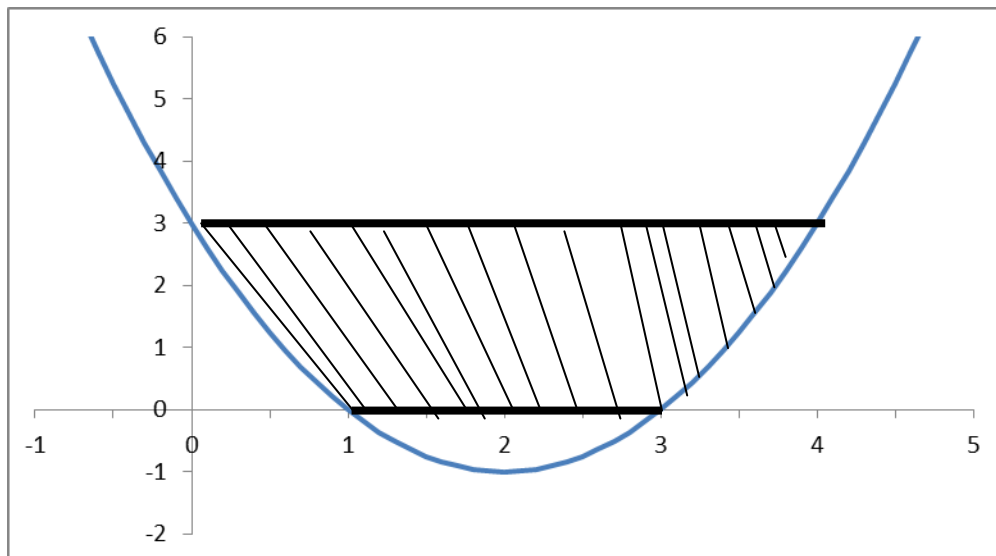
c)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 - 1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{0^2 - 1}{0^2} - \frac{1}{0} = -\frac{1}{0} - \frac{1}{0} = -\infty - \infty = -\infty$$

Quiero suponer que el enunciado del problema es incorrecto y este podría ser

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{x^2 + 1}{x^2} - \frac{1}{x} \right) = \frac{0^2 + 1}{0^2} - \frac{1}{0} = \frac{1}{0} - \frac{1}{0} = \infty - \infty = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3 + x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^3}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} x = 0$$

2.- La siguiente gráfica corresponde a la función $f(x) = x^2 - 4x + 3$ representada respecto a los ejes coordenados. Calcular el área de la parte sombreada. (2,5 puntos)



$$\text{Puntos de corte con los ejes} \Rightarrow \begin{cases} OY \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(0) = 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 \\ OX \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 = x^2 - 4x + 3 \Rightarrow x = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{4+2}{2} = 3 \\ x = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{Ecuación rectas} \Rightarrow \begin{cases} y = 3 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Puntos de corte entre funciones} \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 3 \Rightarrow x^2 - 4x = 0 \Rightarrow (x - 4)x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x - 4 = 0 \Rightarrow x = 4 \end{cases}$$

$$A = \int_0^1 3 \, dx - \int_0^1 (x^2 - 4x + 3) \, dx + \int_1^3 3 \, dx + \int_3^4 3 \, dx - \int_3^4 (x^2 - 4x + 3) \, dx$$

$$\text{Como } \int_0^1 (-x^2 + 4x) \, dx = \int_3^4 (-x^2 + 4x) \, dx$$

$$A = \int_0^1 (-x^2 + 4x) \, dx + \int_1^3 3 \, dx + \int_3^4 (-x^2 + 4x) \, dx = 2 \int_0^1 (-x^2 + 4x) \, dx + \int_1^3 3 \, dx$$

$$A = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot [x^3]_0^1 + 2 \cdot 4 \cdot \frac{1}{2} \cdot [x^2]_0^1 + 3 \cdot [x]_1^3 = -\frac{2}{3} \cdot (1^3 - 0^3) + 4 \cdot (1^2 - 0^2) + 3 \cdot (3 - 1) = -\frac{2}{3} + 4 + 6 = \frac{28}{3} u^2$$

3.- Dada la matriz: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 3 & -m \end{pmatrix}$

a) Determinar los valores del parámetro m para los que la matriz A tiene inversa. (1,5 puntos)

b) Calcular la inversa de la matriz A para $m = 2$ (1 punto)

a) Una matriz tiene inversa cuando su determinante es distinto de cero

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ -1 & 3 & -m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & m & 1 \\ 0 & 3 & 4-m \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m & 1 \\ 3 & 4-m \end{vmatrix} = m(4-m) - 3 = -m^2 + 4m - 3 \Rightarrow$$

$$\text{Si } |A| = 0 \Rightarrow -m^2 + 4m - 3 = 0 \Rightarrow m^2 - 4m + 3 = 0 \Rightarrow \Delta = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3 = 4 \geq 0 \Rightarrow$$

$$m = \frac{4 \pm \sqrt{4}}{2} \Rightarrow \begin{cases} m = \frac{4+2}{2} = 3 \\ m = \frac{4-2}{2} = 1 \end{cases}$$

$$\forall m \in \mathbb{R} - \{1, 3\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{Existe } A^{-1}$$

b)

$$\text{Cuando } m = 2 \Rightarrow |A| = -2^2 + 4 \cdot 2 - 3 = -4 + 8 - 3 = 1 \neq 0 \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \text{adj } A^t \Rightarrow$$

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{adj } A^t = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7 & 12 & -8 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

4.- Dados el punto $P(2, 2, -2)$ y la recta: $r: \begin{cases} 2x + y + z = -2 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases}$

a) Hallar la ecuación del plano π_1 que contiene a r y pasa por P . (1,25 puntos)

b) Hallar la ecuación del plano π_2 que contiene a P y es perpendicular a r . (1,25 puntos)

a) De los planos determinados por el haz que tiene en común a la recta r hallamos el que pasa por el punto P

$$r: \begin{cases} 2x + y + z + 2 = 0 \\ x + 3y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{Haz de planos} \Rightarrow 2x + y + z + 2 + \lambda(x + 3y + z) = 0 \Rightarrow$$

$$\text{Pasando por } P(2, 2, 2) \Rightarrow 2 \cdot 2 + 2 + 2 + 2 + \lambda(2 + 3 \cdot 2 + 2) = 0 \Rightarrow 10 + 10\lambda = 0 \Rightarrow 10\lambda = -10 \Rightarrow$$

$$\lambda = -1 \Rightarrow 2x + y + z + 2 + (-1)(x + 3y + z) = 0 \Rightarrow 2x + y + z + 2 - x - 3y - z = 0 \Rightarrow$$

$$\pi_1: x - 2y + 2 = 0$$

b) El plano π_2 queda determinado por el vector director de r , que es su vector director que es perpendicular al vector \overrightarrow{PG} , siendo G el punto genérico del plano, siendo el producto escalar, de ambos, nulo y la ecuación buscada.

El vector de la recta y del plano, ya que son iguales, se halla como el producto vectorial de los vectores que definen a los planos que determinan la recta.

$$\overrightarrow{v_{\pi_2}} = \overrightarrow{v_r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \vec{i} + \vec{j} + 6\vec{k} - \vec{k} - 3\vec{i} - 2\vec{j} = -2\vec{i} - \vec{j} + 5\vec{k} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (-2, -1, 5) \equiv (2, 1, -5) \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \overrightarrow{v_{\pi_2}} = (2, 1, -5) \\ \overrightarrow{PG} = (x, y, z) - (2, 2, 2) = (x-2, y-2, z-2) \end{cases} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \perp \overrightarrow{PG} \Rightarrow \overrightarrow{v_{\pi_2}} \cdot \overrightarrow{PG} = 0 \Rightarrow$$

$$(2, 1, -5) \cdot (x-2, y-2, z-2) = 0 \Rightarrow 2x - 4 + y - 2 - 5z + 10 = 0 \Rightarrow \pi_2: 2x + y - 5z + 4 = 0$$

OPCIÓN B

1.- Dada la función $f(x) = \begin{cases} (x+a)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{bx}{\sqrt{x+2}} & \text{si } x > -1 \end{cases}$. Hallar valores de a y de b para que $f(x)$ sea derivable

en todo \mathbb{R} . (2,5 puntos)

Para que sea derivable, primeramente tiene que ser continua, y después tener su derivada igual en los puntos de posible discontinuidad, en esta función en $x = -1$

Continuidad

$$\begin{cases} f(1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = (-1+a)^2 \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{b \cdot (-1)}{\sqrt{-1+2}} = -b \end{cases} \Rightarrow f(1) = \lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) \Rightarrow (a-1)^2 = -b$$

Derivabilidad

$$f'(x) = \begin{cases} 2(x+a) & \text{si } x < -1 \\ \frac{b\sqrt{x+2} - \frac{1}{2\sqrt{x+2}}bx}{x+2} = \frac{2b(x+2) - bx}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{2bx+4b-bx}{2(x+2)\sqrt{x+2}} = \frac{b(x+4)}{2(x+2)\sqrt{x+2}} & \text{si } x > -1 \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = 2(-1+a) \\ \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = \frac{b(-1+4)}{2(-1+2)\sqrt{-1+2}} = \frac{3b}{2} \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) \Rightarrow 2(a-1) = \frac{3b}{2} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 4a - 4 = 3b \\ -(a-1)^2 = b \end{cases} \Rightarrow 4a - 4 = -3(a^2 - 2a + 1) \Rightarrow 3a^2 - 6a + 3 + 4a - 4 = 0 \Rightarrow 3a^2 - 2a - 1 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = (-2)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-1) = 4 + 12 = 16 \geq 0 \Rightarrow a = \frac{2 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 3} \Rightarrow \begin{cases} a = \frac{2+4}{6} = 1 \\ a = \frac{2-4}{6} = -\frac{2}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow$$

$$\text{Soluciones} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \Rightarrow b = -(1-1)^2 = 0 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} (x+1)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ 0 & \text{si } x > -1 \end{cases} \\ a = -\frac{1}{3} \Rightarrow b = -\left(-\frac{1}{3}-1\right)^2 = -\frac{16}{9} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} \left(x-\frac{1}{3}\right)^2 & \text{si } x \leq -1 \\ -\frac{16x}{9\sqrt{x+2}} & \text{si } x > -1 \end{cases} \end{cases}$$

2.- Entre todos los rectángulos de área 8 m^2 hallar las dimensiones del que minimiza el producto de las diagonales. (2,5 puntos)

Siendo B la base y H la altura del rectángulo y D cada una de las diagonales, calcularemos el que tenga la menor.

$$\left\{ \begin{array}{l} 8 = BH \Rightarrow H = \frac{8}{B} \\ D = \sqrt{B^2 + H^2} \\ P = D^2 = \left(\sqrt{B^2 + H^2}\right)^2 = B^2 + H^2 \end{array} \right. \Rightarrow P = B^2 + \left(\frac{8}{B}\right)^2 \Rightarrow B^2 + \frac{64}{B^2} \Rightarrow P' = \frac{dP}{dB} = 2B + \frac{-64 \cdot 2B}{B^4}$$

$$P' = 2B - \frac{128}{B^3} = \frac{2B^4 - 128}{B^3} = 2 \frac{B^4 - 64}{B^3} \Rightarrow P' = 0 \Rightarrow 2 \frac{B^4 - 64}{B^3} = 0 \Rightarrow B^4 - 64 = 0 \Rightarrow B^4 = 64 \Rightarrow$$

$$B = \pm \sqrt[4]{2^6} = \pm \sqrt{2^3} = \pm 2\sqrt{2} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} B = 2\sqrt{2} \\ B = -2\sqrt{2} \Rightarrow \text{No es solución} \end{array} \right. \Rightarrow P'' = \frac{d^2P}{dB^2} = 2 - \frac{128 \cdot (-3) \cdot B^2}{B^6} = 2 + \frac{384}{B^4}$$

$$P''(2\sqrt{2}) = 2 + \frac{384}{(2\sqrt{2})^4} = 2 + \frac{384}{2^4 \cdot \sqrt{2^4}} = 2 + \frac{384}{2^6} = 2 + 6 = 8 > 0 \Rightarrow \text{Mínimo} \Rightarrow$$

$$\left\{ \begin{array}{l} B = 2\sqrt{2} \text{ m} \\ H = \frac{8}{2\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2} \text{ m} \end{array} \right.$$

Ejercicio 3.- Dado el siguiente sistema de ecuaciones:
$$\begin{cases} y + z = 1 \\ (m-1)x + y + z = m \\ x + (m-1)y - z = 0 \end{cases}$$

a) Discutirlo según los valores de m . (1,5 puntos)

b) Resolverlo para $m = 2$ (1 punto)

a)

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 1 & 1 \\ 1 & m-1 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ m-1 & 0 & 0 \\ 1 & m & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} m-1 & 0 \\ 1 & m \end{vmatrix} = m(m-1) \Rightarrow \text{Si } |A| = 0 \Rightarrow m(m-1) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{cases} m = 0 \\ m-1 = 0 \Rightarrow m = 1 \end{cases} \Rightarrow$$

$\forall m \in \mathbb{R} - \{0, 1\} \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 = \text{Número de incógnitas} \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$

Si $m = 0$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 2 \neq \text{rang}(A/B) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Incompatible}$$

Si $m = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = \text{rang}(A/B) = 2 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Indeterminado}$$

b)

Si $m = 2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \text{rang}(A) = 3 \Rightarrow \text{Sistema Compatible Determinado}$$

$$x = 1 \Rightarrow 1 + 2y = 1 \Rightarrow 2y = 0 \Rightarrow y = 0 \Rightarrow 0 + z = 1 \Rightarrow z = 1 \Rightarrow$$

$$\text{Solución} \Rightarrow (x, y, z) = (1, 0, 1)$$

Ejercicio 4.- Dadas las rectas: $r: \frac{x}{5} = \frac{y+1}{3} = \frac{z}{4}$ y $s: \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}$

- a) Determinar la ecuación general del plano paralelo a las rectas r y s y que pasa por el origen de coordenadas. (1,5 puntos)
 b) Hallar el ángulo que forman r y s . (1 punto)

a) El plano π queda determinado por los vectores directores de las rectas r y s y el vector \mathbf{OG} siendo \mathbf{G} el punto genérico del plano y \mathbf{O} el origen de coordenadas.

Como los tres vectores son coplanarios y este último es combinación lineal de los otros dos el determinante de la matriz que forman es nulo y la ecuación pedida del plano.

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (5, 3, 4) \\ \vec{v}_s = (3, 0, 0) \\ \vec{OG} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z) \end{cases} \Rightarrow \pi \equiv \begin{vmatrix} x & y & z \\ 5 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 12y - 9z = 0 \Rightarrow \pi : 4y - 3z = 0$$

b) El coseno del ángulo que forman sus vectores directores es el cociente entre su producto escalar y el producto de sus módulos

$$\begin{cases} \vec{v}_r = (5, 3, 4) \\ \vec{v}_s = (3, 0, 0) \end{cases} \Rightarrow \cos \alpha = \frac{|\vec{v}_r \cdot \vec{v}_s|}{|\vec{v}_r| \cdot |\vec{v}_s|} = \frac{|(5, 3, 4) \cdot (3, 0, 0)|}{\sqrt{5^2 + 3^2 + 4^2} \cdot \sqrt{3^2 + 0^2 + 0^2}} = \frac{|15|}{\sqrt{50} \cdot 3} = \frac{15}{3 \cdot 5 \cdot \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$$

$$\alpha = \arccos \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 45^\circ = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$